Contenido

¿Cómo escribir la regla del producto y del cociente en la notación de Leibniz?

Demostración de la regla del producto

MatemáticaTuya, 2014

Derechos reservados

Regla del producto y del cociente en notación de Leibzniz

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)g(x)+f(x)\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)g(x)-f(x)\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)}{g^{2}(x)}$$

MatematicaTuya.com

Demostración de la regla del producto

Demostración de la regla del producto

Primero escribir la definición de la función derivada de (fg)

$$(fg)'(x) = \lim_{?} \frac{? \quad - ?}{h}$$

Completa

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

MatematicaTuya.com

Demostración de la regla del producto

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Tenemos que buscar que aparezca la definición de la derivada de f y la derivada de g

En el numerador sumamos y restamos $f(x+h)g(x)$

No alteramos la expresión

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Demostración de la regla del producto

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Aquí restamos

Aquí sumamos

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Ahora, interpretamos como una suma con igual denominador

De un término saldrá la parte con la derivada de f, del otro término saldrá la parte con g´

Demostración de la regla del producto

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right]$$

En el numerador sacamos $g(x+h)$ *de factor común*

En el numerador sacamos $f(x)$ *de factor común*

matematica Tuya.com

Demostración de la regla del producto

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ \qquad g(x+h) - f(x)g(x)}{}$$

En este numerador hemos sacado $g(x+h)$ *de factor común*

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x \qquad f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)(f(x+h) - f(x))}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[g(x+h)\frac{(f(x+h) - f(x))}{h} + f(x)\frac{(g(x+h) - g(x))}{h}\right]$$

Ahora, como los límites existen, aplicamos la propiedad del límite de una suma

Matematicalia

Demostración de la regla del producto

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ \qquad g(x+h) - f(x)g(x)}{}$$

En este numerador, hemos sacado $g(x+h)$ *de factor común*

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x \qquad f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)(f(x+h) - f(x))}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[g(x+h)\frac{(f(x+h) - f(x))}{h} + f(x)\frac{(g(x+h) - g(x))}{h}\right]$$

Ahora, como los límites existen, aplicamos la propiedad del límite de una suma

Matematicalia

Demostración de la regla del producto

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h)(f(x+h) - f(x))}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[g(x+h)\frac{(f(x+h) - f(x))}{h} + f(x)\frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \right]$$

el límite de una suma es la suma de los límites

$$= \lim_{h\to 0} \left[g(x+h)\frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \right] + \lim_{h\to 0} \left[f(x)\frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \right]$$

Aplicamos la propiedad del límite de un producto, a ambos límites

MatematicaTuya.com

Demostración de la regla del producto

$$(fg)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[g(x+h)\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}+f(x)\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left[f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\underbrace{\lim_{h\to 0}g(x+h)}_{}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{}+\underbrace{\lim_{h\to 0}f(x)}_{}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{}$$

El límite de un producto es el producto de los límites

g derivable $\Rightarrow$ es continua: $\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

definición de la derivada de f

f(x) es una constante en el límite

definición de la derivada de g

MatematicaTuya.com

Demostración de la regla del producto

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[g(x+h)\frac{(f(x+h) - f(x))}{h} + f(x)\frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] + \lim_{h\to 0} \left[f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= g(x)f'(x) + f(x)g'(x) \quad \vee$$

MatematicaTuya.com