## TEOREMA **Regla de la cadena**

Si $y=f(u)$ una función diferenciable de $u$ y $u=g(x)$ una función diferenciable de $x$, entonces $y=f(g(x))$ es diferenciable de $x$ y

$$\left(\left(f \circ g\right)(x)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

Esto es

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

## Demostración

## TEOREMA **Regla de la cadena**

Si $y=f(u)$ una función diferenciable de $u$ y $u=g(x)$ una función diferenciable de $x$, entonces $y=f(g(x))$ es diferenciable de $x$ y

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

# Demostración

Planteamos la definición de la derivada para $(f \circ g)(c)$

$$\left(f\left(g(c)\right)\right)' = \lim_{x\to c} \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(c)\right)}{x-c}$$

Queremos llegar a un producto de límites de cocientes incrementales,

uno es de $g$ con respecto a $x$

Multiplicamos el numerador y el denominador por $g(x)-g(c)$

Suponiendo que $g(x) \neq g(c)$ Hacemos una suposición dónde esto ocurre

**TEOREMA Regla de la cadena**

Si $y=f(u)$ una función diferenciable en $u$ y $u=g(x)$ una función diferenciable en $x$, entonces $y=f(g(x))$ es diferenciable en $x$ y

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$$

## Demostración

Caso $g'(x) \neq 0$

Si $x$ esta suficientemente cerca de $c$ entonces $g(x) \neq g(c)$

$$\left(f\left(g\left(c\right)\right)\right)' = \lim_{x\to c}\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c}\frac{\left(f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)\right)\left(g\left(x\right)-g\left(c\right)\right)}{\left(x-c\right)\left(g\left(x\right)-g\left(c\right)\right)}$$

Descomponemos como un producto de fracciones, donde una es el cociente incremental de g

$$= \lim_{x\to c}\left[\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{g\left(x\right)-g\left(c\right)}\cdot\frac{g\left(x\right)-g\left(c\right)}{x-c}\right]$$

Aplicamos la propiedad del límite de un producto

$$= \underbrace{\lim_{x\to c}\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{g\left(x\right)-g\left(c\right)}}_{u=g(x)}\cdot\lim_{x\to c}\frac{g\left(x\right)-g\left(c\right)}{x-c}$$

Si $x \to c$ entonces por ser $g$ continua $g(x) \to g(c)$, esto es, $u \to g(c)$

**TEOREMA Regla de la cadena**

Si $y=f(u)$ una función diferenciable en $u$ y $u=g(x)$ una función diferenciable en $x$, entonces $y=f(g(x))$ es diferenciable en $x$ y

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

# Demostración

Caso $g'(x)\neq 0$

$$\left(f\left(g(c)\right)\right)' = \lim_{x\to c}\frac{f\left(g(x)\right)-f\left(g(c)\right)}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c}\frac{\left(f\left(g(x)\right)-f\left(g(c)\right)\right)\left(g(x)-g(c)\right)}{(x-c)\left(g(x)-g(c)\right)}$$

$$= \lim_{x\to c}\left[\frac{f\left(g(x)\right)-f\left(g(c)\right)}{g(x)-g(c)}\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right]$$

$$= \lim_{x\to c}\frac{f\left(g(x)\right)-f\left(g(c)\right)}{g(x)-g(c)}\cdot\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

$$= \underbrace{\lim_{u\to g(c)}\frac{f(u)-f\left(g(c)\right)}{u-g(c)}}_{\text{¿Cuál derivada? ¿Dónde la estamos evaluando?}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}_{\text{¿Cuál derivada?}}$$

**TEOREMA Regla de la cadena**

Si $y=f(u)$ una función diferenciable en $u$ y $u=g(x)$ una función diferenciable en $x$, entonces $y=f(g(x))$ es diferenciable en $x$ y

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$$

## Demostración

Caso $g'(x) \neq 0$

$$\left(f\left(g\left(c\right)\right)\right)' = \lim_{x\to c}\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c}\frac{\left(f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)\right)\left(g\left(x\right)-g\left(c\right)\right)}{\left(x-c\right)\left(g\left(x\right)-g\left(c\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to c}\left[\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{g\left(x\right)-g\left(c\right)}\cdot\frac{g\left(x\right)-g\left(c\right)}{x-c}\right]$$

$$= \lim_{x\to c}\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{g\left(x\right)-g\left(c\right)}\cdot\lim_{x\to c}\frac{g\left(x\right)-g\left(c\right)}{x-c}$$

$$= \lim_{u\to g(c)}\frac{f\left(u\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{u-g\left(c\right)}\cdot\lim_{x\to c}\frac{g\left(x\right)-g\left(c\right)}{x-c}$$

$$= f'\left(g\left(c\right)\right)g'\left(c\right)$$

**TEOREMA Regla de la cadena**

Si $y=f(u)$ una función diferenciable en $u$ y $u=g(x)$ una función diferenciable en $x$, entonces $y=f(g(x))$ es diferenciable en $x$ y

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$$

## Demostración

Caso $g'\left(x\right)=0$

Vamos a considerar dos tipos de valores de $x$ para cuando $x \to c$

•Para los valores $x$ tales que $g\left(x\right)=g\left(c\right)$

tenemos $$\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{x-c}=0$$

$$\to 0$$

•Para los valores $x$ en que $g\left(x\right)\neq g\left(c\right)$,

podemos hacer un desarrollo similar

$$\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{x-c}=\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{g\left(x\right)-g\left(c\right)}\frac{g\left(x\right)-g\left(c\right)}{x-c}$$

Para $x$ tiende a $c$, para $x$ tales que $g\left(x\right)\neq g\left(c\right)$

$$\to f'\left(g\left(c\right)\right)g'\left(c\right)=f'\left(g\left(c\right)\right)\cdot 0=0$$

En ambos, tenemos que $$\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(c\right)\right)}{x-c}\xrightarrow[x\to c]{} 0$$

Llegamos a que $$\left(f\left(g\left(c\right)\right)\right)'=0=f'\left(g\left(c\right)\right)g'\left(c\right)$$

Toma en cuenta que $g´(c)=0$

La igualdad de los dos extremos es la que nos interesaba