PROBLEMAS RESUELTOS

1.1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+x}$

Al sustituir x por 0, se obtiene 0/0. Se tiene una forma indeterminada

$$\lim \frac{\text{binomio con raíces cúbicas}}{***} \overset{0/0}{=}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x}\cdot 1 + 1^2\right)}{\left(x^2+x\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x}\cdot 1 + 1^2\right)}$$

Se multiplica numerador y denominador por el factor racionalizante

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 + (1)^3}{\left(x^2+x\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x}\cdot 1 + 1^2\right)}$$

Se usa la fórmula de la suma de cubos

El producto del denominador no conviene desarrollarlo

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\left(x^2+x\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x}\cdot 1 + 1^2\right)}$$

Se simplica el radical

Se buscan el factor x+1 en el denominador. Se factoriza

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{x+1}}{x\cancel{(x+1)}\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x}\cdot 1 + 1^2\right)}$$

Se cancela

Se resolvió la indeterminación

$$= \lim_{x\to -1} \frac{1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x}\cdot 1 + 1^2\right)}$$

$$= \frac{1}{-1\left(\left(\sqrt[3]{-1}\right)^2 - \sqrt[3]{-1}\cdot 1 + 1^2\right)} = -\frac{1}{3}$$

Podemos calcular el límite por sustitución directa

$$1.2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

Al sustituir x por 0, se obtiene 0/0.
Se tiene una forma indeterminada

$$\lim \frac{\text{binomio con raíz cúbica}}{\text{binomio con raíz cuadrada}} \overset{0/0}{=}$$

Se multiplican numerador y denominador por el factor racionalizante del binomio con raíz cúbica y por el del binomio con raíz cuadrada

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2\right)\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2\right)}$$

Se asocian los factores convenientemente

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-(1)^2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-(1)^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2\right)}$$

Se usan las fórmulas de la diferencias de cubos y cuadrados

Se simplica los radicales

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{(x-1)}\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2\right)}$$

Se cancela

Se resolvió la indeterminación

$$=\frac{1+1}{\left(\left(\sqrt{1}\right)^2+\sqrt[3]{1}\cdot 1+1^2\right)}=\frac{2}{3}$$

$$1.3)\quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+2}}$$

Se tiene una forma indeterminada 0/0

$$\lim \frac{\text{polinomio}}{\text{binomio con raíces cúbicas}} \overset{0/0}{=}$$

Se multiplica numerador y denominador por el factor racionalizante

$$=\lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2-3x+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+2}+\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+2}\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+2}+\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\right)}$$

Fórmula de la diferencia de cubos

$$=\lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2-3x+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+2}+\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3}$$

$$=\lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2-3x+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+2}+\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\right)}{x^2-\left(x+2\right)}$$

Se buscan factores x-2.
Se factoriza

$$=\lim_{x\to 2} \frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+2}+\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\right)}{x^2-x-2}$$

$$=\lim_{x\to 1} \frac{\left(x-1\right)\cancel{\left(x-2\right)}\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+2}+\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\right)}{\left(x+1\right)\cancel{\left(x-2\right)}}=\frac{\left(2-1\right)\cdot 3\cdot\sqrt[3]{16}}{2+1}=2\cdot\sqrt[3]{2}$$